Тема: Линейное программирование

Задача 1. Предприятие выпускает два вида продукции А и В, для производства которых используется сырье трех типов. На изготовление единицы изделия А требуется затратить сырья каждого типа a_{11}, a_{12}, a_{13} кг соответственно, а для единицы изделия В – a_{21}, a_{22}, a_{23} кг. Производство обеспечено сырьем каждого типа в количестве b_1, b_2, b_3 кг соответственно. Стоимость единицы изделия А составляет α руб., а единицы изделия В – β руб. Требуется составить план производства изделий А и В, обеспечивающий максимальную стоимость готовой продукции. Числовые данные параметров приведены в след. таблице.

1. Решить задачу симплекс-методом.
2. Решить исходную задачу графическим методом.

Вариант 1.

$a_{11} = 2,\ a_{12} = 3,\ a_{13} = 5$

$a_{21} = 5,\ a_{22} = 4,\ a_{23} = 3$ $\qquad \alpha = 34$

$b_1 = 432,\ b_2 = 424,\ b_3 = 582$ $\qquad \beta = 50$

Решение:

1. Составим математическую модель задачи.

Пусть x_1, x_2 – количество производимых изделий вида А и В соответственно.

Ограничения по сырью трех типов:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \le 432, \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \le 424, \\ 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 582, \end{cases} \qquad (1)$$

кот. называются нетривиальными ограничениями задачи.

Нетривиальные ограничения задачи:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (2)$$

Целевая функция – общая стоимость произведенной продукции

$$Z = 34 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 \to \max \qquad (3)$$

Приведем задачу (1)–(3) к каноническому виду, вводя балансовые переменные x_3, x_4, x_5:

$$(4) \qquad \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 432, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 424, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_5 = 582. \end{cases}$$

Физически переменные x_3, x_4, x_5 – остатки сырья 1-го, 2-го и 3-го типов соответственно.

$$(5) \qquad x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Введем балансовые переменные в целевую функцию с коэффициентами, равными 0:

$$Z = 34x_1 + 50 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$

$$(6) \qquad Z - 34x_1 - 50x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0.$$

Задача в форме (4)–(6) называется канонической моделью.

Построим исходный опорный план, подставив в (4) $x_1 = x_2 = 0$:

$$x_3 = 432;\ x_4 = 424;\ x_5 = 582,$$

которые удовлетворяют (5).

Опорный план в векторном виде:

$$\bar{x}_0 = (0; 0; 432; 424; 582).$$

Подставив $\bar{x}_0$ в целевую функцию (3), получим: $Z(\bar{x}_0) = 0$.

Составим первоначальную симплексную таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Θ
2	5	1	0	0	432	$432/5$
3	4	0	1	0	424	$\frac{424}{4} = 106$
5	3	0	0	1	582	$\frac{582}{3} = 194$
−34	−50	0	0	0	0	–

В число базисных вводим x_2. Выводим x_3.

Строим таблицу первой итерации симплекс-метода:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Θ
$2/5$	1	$1/5$	0	0	$432/5$	216
$7/5$	0	$-4/5$	1	0	$392/5$	56
$19/5$	0	$-3/5$	0	1	$1614/5$	$\frac{1614}{19}$
−14	0	10	0	0	4320	

Произошел переход к новым базисным переменным x_2, x_4, x_5. При этом x_1, x_3 – свободные переменные. Значения остальных переменных получаем из нового столбца b:

$x_2 = \frac{432}{5}$, $x_4 = \frac{392}{5}$, $x_5 = \frac{1614}{5}$.

Опорный план в векторной форме:

$$\bar{x}_1 = \left(0; \frac{432}{5}; 0; \frac{392}{5}; \frac{1614}{5}\right).$$

Этому плану соответствует $Z(\bar{x}_1) = 4320$.

В индексной строке остался один отрицательный элемент, поэтому план не является оптимальным. x_1 – базисная (станет в новом плане).

Пересчитываем таблицу первой итерации и получаем таблицу второй итерации:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
0	1	3/7	-2/7	0	64
1	0	-4/7	5/7	0	56
0	0	11/7	-13/7	1	110
0	0	2	10	0	5104

$$\bar{x}_2 = (56; 64; 0; 0; 110).$$

В индексной строке нет отрицательных элементов, план оптимален:

$$\bar{x}^* = \bar{x}_2; \quad Z_{max} = 5104.$$

План выпуска, включающий 56 единиц продукции А и 64 единицы продукции вида В, является оптимальным. При этом будет достигнута максимальная стоимость готовой продукции.

2. Рассмотрим задачу (1) – (3). Поскольку в ней две переменные, решим задачу графически. Неравенства (2) означают, что решение ищем в первом квадранте.

Первая полуплоскость (1): $2x_1 + 5x_2 \le 432$.

$$2x_1 + 5x_2 = 432.$$

При $x_1 = 0$ получаем $x_2 = \frac{432}{5} = 86{,}4$, а при $x_2 = 0$ находим $x_1 = 216$.

$0 + 0 \le 432 \Rightarrow$ начало координат принадлежит указанной полуплоскости. Аналогично строим остальные полуплоскости.

Градиент (вектор роста) целевой функции

$$\bar{c} = (34; 50)$$

Оптимальному плану соответствует угловая точка, порождающая самый дальний от начала координат перпендикуляр. Угловая точка в нашем случае образована пересечением границ 1-го и 2-го неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 432, \\ 3x_1 + 4x_2 = 424. \end{cases}$$

Решение этой системы дает оптимальный план задачи:

$$x_1^* = 56; \quad x_2^* = 64.$$

Заметим, что полученные числа совпадают с решением симплексного метода.

Ответ: $Z_{max}(56; 64) = 5104$.